

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
математического анализа

С.А. Шабров



25.05.2023

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.09 Элементы выпуклого анализа**

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

02.04.01 Математика и компьютерные науки

2. Профиль подготовки/специализация:

Математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении

3. Квалификация выпускника: магистр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

Кафедра математического анализа

6. Составители программы: Колесникова Инна Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры математического анализа

7. Рекомендована: Научно-методическим Советом математического факультета, протокол от 25.05.2023, №0500-06

8. Учебный год: 2024/2025

Семестр(ы): 4

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

Освоение основных методов выпуклого анализа, необходимых для изучения дисциплин общенаучного и профессионального циклов; развитие логического и алгоритмического мышления; повышение общей математической культуры; формирование навыков формализации моделей реальных процессов; анализа систем, процессов и явлений при поиске оптимальных решений и выборе наилучших способов реализации этих решений; выработка исследовательских навыков и умений самостоятельного анализа прикладных задач, а также оценки последствий своей деятельности при разработке различных проектов.

Задачи дисциплины:

Изучение теоретических основ выпуклого анализа, приемов и методов исследования и решения математически и логически формализованных задач с помощью положений выпуклого анализа; формирование культуры мышления, умения демонстрировать базовые знания выпуклого анализа, и приобретать новые научные и профессиональные знания по выпуклому анализу; формирование навыков анализа фундаментальных и прикладных теорий, концепций, фактов, а также построения математических моделей изучаемых процессов и последствий их использования с помощью методов выпуклого анализа.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Элементы выпуклого анализа» относится к части формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 основной образовательной программы направления подготовки 02.04.01 – Математика и компьютерные науки - Магистр.

Курс является логическим продолжением преподавания предметов: «Математический анализ», «Алгебра», и осуществляет разумный баланс между общеобразовательным содержанием выбранного профиля и его дальнейшей профессиональной направленностью, что, несомненно, повышает профессиональное самоопределение учащихся и уровень их социальной адаптации. Курс имеет важное значение для задач линейного и нелинейного программирования, теории игр и теории оптимального управления. Цель данного курса состоит в том, чтобы научить студентов работать с выпуклыми функциями и выпуклыми множествами.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен проводить работы по сбору, обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований в области математического моделирова-	ПК-1.1	Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Знать: - базовые понятия теории математического анализа Уметь: - строго доказывать основные утверждения, сформулированные в курсе Владеть: - методами, используемыми в теории математического анализа

	<p>ния физических и экономических процессов методами математического анализа, а также реализовывать соответствующие математические алгоритмы программно</p>			
ПК-2	<p>Способен анализировать, систематизировать и обобщать передовой отечественный и международный опыт в области математического и компьютерного моделирования различных процессов</p>	ПК-2.2	<p>Умеет решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой</p>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> - область применения тех или методов построения математических моделей <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - адекватно интерпретировать параметры прикладных задач математического анализа <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - навыками обработки полученной информации для построения адекватных математических моделей
ПК-3	<p>Способен осуществлять разработку планов и методических программ проведения исследований и разработок</p>	ПК-3.2	<p>Умеет применять навыки методической и экспертной работы</p>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> - основные методы построения математических моделей и методы решения полученных задач <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - описывать естественные процессы в виде задач <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - навыками решения построенных задач

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. (в соответствии с учебным планом) — 2/72.

Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен) зачет.

13. Виды учебной работы:

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			4 семестр	№ семестра
Контактная работа		40	40	
в том числе:	лекции	20	20	
	практические	20	20	
	лабораторные			
Самостоятельная работа		32	32	
в том числе: курсовая работа (проект)				
Форма промежуточной аттестации (зачёт)				
Итого:		72	72	

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1.1	Основные понятия выпуклого анализа	Аффинные множества. Выпуклые множества и конусы. Алгебра выпуклых множеств. Выпуклые функции. Операции над функциями. Относительная внутренность выпуклых множеств. Замыкание выпуклых множеств, Рецессивные конусы. Непрерывность выпуклых функций
1.2	Теория двойственности	Теоремы отделимости. Сопряженные выпуклые функции. Опорные функции. Поляры выпуклых множеств и функций
1.3	Дифференцирование	Производные по направлению и субградиенты. Субдифференциалы. Дифференцируемость выпуклых функций
1.4	Экстремальные задачи с ограничениями	Минимумы выпуклых функций. Множители Лагранжа. Теорема двойственности Фенхеля. Седловые функции и минимакс
2. Практические занятия		
2.1	Основные понятия выпуклого анализа	Аффинные множества. Выпуклые множества и конусы. Алгебра выпуклых множеств. Выпуклые функции. Операции над функциями. Относительная внутренность выпуклых множеств. Замыкание выпуклых множеств, Рецессивные конусы. Непрерывность выпуклых функций
2.2	Теория двойственности	Теоремы отделимости. Сопряженные выпуклые функции. Опорные функции. Поляры выпуклых множеств и функций
2.3	Дифференцирование	Производные по направлению и субградиенты. Суб-

		дифференциалы. Дифференцируемость выпуклых функций
2.4	Экстремальные задачи с ограничениями	Минимумы выпуклых функций. Множители Лагранжа. Теорема двойственности Фенхеля. Седловые функции и минимакс

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Основные понятия выпуклого анализа	4	4		6	14
2	Теория двойственности	6	6		8	20
3	Дифференцирование	4	4		8	16
4	Экстремальные задачи с ограничениями	6	6		10	22
	Итого:	20	20		32	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе освоения дисциплины студенты должны посетить практические занятия и сдать зачет.

Указания для освоения теоретического и практического материала и сдачи зачета:

1. Обязательное посещение лекционных и практических занятий по дисциплине с конспектированием излагаемого преподавателем материала в соответствии с расписанием занятий.

2. Получение в библиотеке рекомендованной учебной литературы и электронное копирование рабочей программы с методическими рекомендациями, конспекта лекций.

3. Копирование (электронное) перечня вопросов к зачёту по дисциплине, а также списка рекомендованной литературы из рабочей программы дисциплины.

4. При подготовке к практическим занятиям по дисциплине необходимо изучить рекомендованный преподавателем материал, иметь при себе конспекты соответствующих тем и необходимый справочный материал.

5. Рекомендуется следовать советам преподавателя, связанным с освоением предлагаемого материала, провести самостоятельный Интернет - поиск информации (видеофайлов, файлов-презентаций, файлов с учебными пособиями) по ключевым словам курса и ознакомиться с найденной информацией при подготовке к зачёту по дисциплине.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Половинкин, Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. — М. : Физматлит, 2004.— 416 с.
2	Иванов, Г.Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения / Г. Е. Иванов. — М. : Физматлит, 2006. — 351 с.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	<i>Магарил-Ильяев, Г.Г. Выпуклый анализ и его приложения / Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. — М. : Эдиториал УРСС, 2000. — 176 с.</i>
4	<i>Рокафеллар, Р. Т. Выпуклый анализ / Р. Т. Рокафеллар. — М : Мир, 1973. — 469 с.</i>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
5	http://www.lib.vsu.ru – официальный сайт библиотеки ВГУ
6	http://www.math.vsu.ru – официальный сайт математического факультета ВГУ
7	Поисковые системы www.google.ru , www.yandex.ru

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Половинкин, Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. — М. : Физматлит, 2004.— 416 с.

Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем, в том числе осуществляемый с помощью удаленной связи через интернет.

Самостоятельная работа магистрантов, прежде всего, заключается в изучении литературы, дополняющей материал, излагаемый на лекции. Необходимо овладеть навыками библиографического поиска, в том числе среди сетевых ресурсов, уметь находить подходящие источники, творчески и критически перерабатывать информацию, научиться сопоставлять различные точки зрения и определять методы исследований, а также представлять в устной форме изложение своих методологических изысканий.

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, актуализация личного и учебно-профессионального опыта обучающихся, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

В практической части курса используется стандартное современное программное обеспечение персонального компьютера.

В части освоения материала лекционных и лабораторных занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии

Осуществляется интерактивная связь с преподавателем через сеть интернет, проводятся индивидуальные онлайн консультации.

Лекции осуществляются с использованием презентационного оборудования.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и лабораторных занятий используются учебные аудитории. Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой (ауд. 310), расположенный на 3 этаже учебного корпуса № 1.

Компьютерный класс: специализированная мебель, маркерная доска, персональные компьютеры

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ubuntu.com/download/desktop>)

VisualStudioCommunity (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/>); MATLABClassroom (сублицензионный контракт 3010-07/01-19 от 09.01.19);

LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ru.libreoffice.org/about-us/license/>)

Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.lazarus-ide.org/index.php>)

FreePascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.freepascal.org/faq.html>)

Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <http://maxima.sourceforge.net/faq.html>)

В самостоятельной работе обучающиеся используют ресурсы Зональной научной библиотеки ВГУ (электронный каталог: <http://www.lib.vsu.ru>)

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Основные понятия выпуклого анализа	ПК-1 ПК-2	ПК - 1.1 ПК - 2.2	Промежуточная аттестация – Домашняя работа 1
2.	Теория двойственности	ПК-1 ПК-2	ПК - 1.1 ПК - 2.2	Промежуточная аттестация – Домашняя работа 2
3.	Дифференцирование	ПК-1 ПК-2 ПК-3	ПК - 1.1 ПК - 2.2 ПК - 3.2	Промежуточная аттестация – Контрольная работа 1
4.	Экстремальные задачи с ограничениями	ПК-1 ПК-2 ПК-3	ПК - 1.1 ПК - 2.2 ПК - 3.2	Промежуточная аттестация – Контрольная работа 2
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет				Домашние и контрольные работы

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущая аттестация проводится в форме выполнения домашних и контрольных работ.

Домашняя работа № 1.

Будет ли выпуклой функция $f(x) = \text{sign}(\sin x)$.

Домашняя работа № 2.

Построить опорную функцию множества $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

Контрольная работа № 1.

Проверить выпуклость множества $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2^2 \leq 0, -x_1^2 + x_2 \leq 0 \right\}$.

Контрольная работа № 2.

Исследовать на экстремум функцию $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 + 4x_1 \cdot x_2 - 2x_2^2$.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация включает в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний

Вопросы к зачету:

1. Выпуклое множество. Элементарные свойства (пересечение, сумма, образ и прообраз, проекция). Выпуклая оболочка. Теорема Каратеодори. Выпуклая оболочка компакта.
2. Внутренность и замыкание выпуклого множества. Размерность выпуклого множества. Непустота относительной внутренней выпуклого множества.
3. Теоремы об отделимости (точки от выпуклого множества, двух выпуклых множеств, компакта от выпуклого множества). Существование опорного функционала в граничной точке выпуклого множества.
4. Сопряженный конус. Элементарные свойства. Теорема о втором сопряженном. Сопряженный конус к полупространству, к сумме конусов.
5. Крайние точки выпуклого множества. Теорема Минковского о представлении выпуклого компакта в виде выпуклой оболочки множества своих крайних точек.
6. Выпуклые функции. Определение с помощью надграфика и с помощью неравенства Йенсена. Сумма и максимум выпуклых функций. Восстановление функции по ее надграфику.
7. Опорная и индикаторная функции множества, функция Минковского и их выпуклость. Полунепрерывные снизу функции. Замыкание выпуклой функции.
8. Критерии выпуклости дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций.
9. Субдифференциал выпуклой функции в точке. Теорема Моро--Рокафеллара о субдифференциале суммы выпуклых функций.
10. Производная выпуклой функции по направлению. Однородность и выпуклость производной в зависимости от направления. Совпадение субдифференциала выпуклой функции в точке и субдифференциала ее производной по направлениям.
11. Производная по направлению от максимума конечного числа функций. Теорема Дубовицкого--Милютинна о субдифференциале максимума выпуклых функций в точке.
12. Сопряженная функция. Неравенство Юнга. Классическое преобразование Лежандра. Сопряженные к сублинейной и к индикаторной функции.
13. Вторая сопряженная функция. Теорема Фенхеля--Моро.

14. Задача о минимуме выпуклой функции на выпуклом множестве. Глобальность локального минимума. Необходимое и достаточное условие минимума.

15. Задача о минимуме выпуклой функции при выпуклых ограничениях. Теорема Куна--Таккера.

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие показатели:

1) знание основных понятий, методов;

2) умение применять полученные знания и навыки для решения задач;- проводить анализ полученных решений;

3) владение математическим аппаратом и современными методами в области выпуклого анализа.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Ответ соответствует одному или более чем одному из перечисленных показателей, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует знание учебного материала, возможно с некоторыми ошибками.	Пороговый уровень и выше порогового	зачтено
Ответ не соответствует ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или отсутствие их.		не зачтено

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1. Все методы решения, основанные на исследовании функций в небольшой окрестности последовательно выбираемых точек, называют

а) методами отсечения;

б) методами поиска;

в) методами возможных направлений.

Ответ: б).

2. Множество точек называется выпуклым, если

а) оно является многоугольником;

б) оно вместе с любыми двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки;

в) большинство точек отрезка принадлежит данному множеству;

г) отрезок, соединяющий любые две несовпадающие точки множества, целиком принадлежит этому множеству.

Ответ: б).

3. Функция называется сепарабельной, если

а) ее можно представить в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной переменной;

б) ее можно представить в виде квадратичной функции;

в) она содержит константу.

Ответ: а).

Градиентные методы:

- а) наискорейшего подъема;
- б) штрафных функций;
- в) наискорейшего спуска;
- г) локального случайного поиска;
- д) нелокального случайного поиска.

Ответ: в).

5. Является ли множество \mathbb{R}^n выпуклым:

- а) является;
- б) не является.

Ответ: а).

6. Выберите верное утверждение:

- а) если замкнутое множество ограничено сверху, то оно содержит свою верхнюю грань. Аналогично, если замкнутое множество ограничено снизу, то оно содержит свою нижнюю грань;
- б) произведение любого числа открытых множеств есть открытое множество;
- в) объединение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

Ответ: а).

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов – указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).